2.1 OS PROBLEMAS DA TANGENTE E DA VELOCIDADE

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

1. O ponto $P(4, 2)$ está sobre a curva $y = \sqrt{x}$.

(a) Se Q é o ponto $(x, \sqrt{x})$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de seis casas decimais), para os seguintes valores de x:

(i) 5
(ii) 4,5
(iii) 4,1
(iv) 4,01
(v) 4,001
(vi) 3
(vii) 3,5
(viii) 3,9
(ix) 3,99
(x) 3,999

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(4, 2)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(4, 2)$.

2. O ponto $P(0{,}5, 2)$ está sobre a curva $y = 1/x$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1/x)$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ (com precisão de seis casas decimais), para os seguintes valores de x:

(i) 2
(ii) 1
(iii) 0,9
(iv) 0,8
(v) 0,7
(vi) 0,6
(vii) 0,55
(viii) 0,51
(ix) 0,45
(x) 0,49

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(0{,}5, 2)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(0{,}5, 2)$.

(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.

3. O ponto $P(1, 3)$ está sobre a curva $y = 1 + x + x^2$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1 + x + x^2)$, encontre a inclinação da reta secante PQ para os seguintes valores de x:

(i) 2
(ii) 1,5
(iii) 1,1
(iv) 1,01
(v) 1,001
(vi) 0
(vii) 0,5
(viii) 0,9
(ix) 0,99
(x) 0,999

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(1, 3)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(1, 3)$.

4. O ponto $P(-1, 3)$ está sobre a curva $y = 1 - 2x^3$.

(a) Se Q é o ponto $(x, 1 - 2x^3)$, encontre a inclinação da reta secante PQ para os seguintes valores de x:

(i) -2
(ii) $-1{,}5$
(iii) $-1{,}1$
(iv) $-1{,}01$
(v) $-1{,}001$
(vi) 0
(vii) $-0{,}5$
(viii) $-0{,}9$
(ix) $-0{,}99$
(x) $-0{,}999$

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(-1, 3)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(-1, 3)$.

5. O deslocamento (em metros) de uma determinada partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = t^2 + t$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos de tempo:

(i) [0, 2]
(ii) [0, 1]
(iii) [0, 0,5]
(iv) [0, 0,1]

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 0$.

(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a).

(d) Desenhe a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

6. Os dados experimentais na tabela definem y como uma função de x.

x	0	1	2	3	4	5
y	2,6	2,0	1,1	1,3	2,1	3,5

(a) Se P é o ponto (3, 1,3), encontre as inclinações das retas secantes PQ em que Q é o ponto sobre o gráfico com $x = 0, 1, 2, 4$ e 5.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da reta tangente em P.

2.1 RESPOSTAS

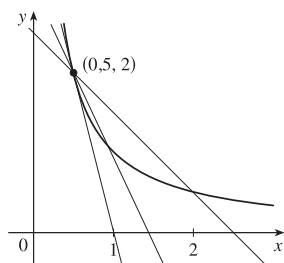
1. (a) (i) 0,236068 (ii) 0,242641 (iii) 0,248457
(iv) 0,249844 (v) 0,249984 (vi) 0,267949
(vii) 0,258343 (viii) 0,251582 (ix) 0,250156
(x) 0,250016

(b) $\frac{1}{4}$ (c) $y = \frac{1}{4}x + 1$

2. (a) (i) –1 (ii) –2 (iii) –2,222222 (iv) –2,5
(v) –2,857143 (vi) –3,333333 (vii) –3,636364
(viii) –3,921569 (ix) –4,444444 (x) –4,081633

(b) –4

(c) $y = -4x + 4$

(d)

3. (a) (i) 4 (ii) 3,5 (iii) 3,1 (iv) 3,01
(v) 3,001 (vi) 2 (vii) 2,5 (viii) 2,9
(ix) 2,99 (x) 2,999

(b) 3

(c) $y = 3x$

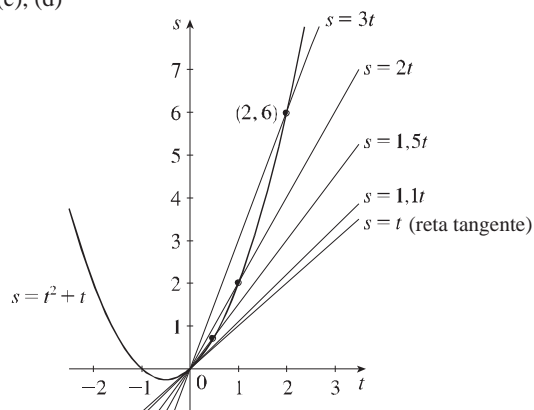
4. (a) (i) –14 (ii) –9,5 (iii) –6,62 (iv) –6,0602
(v) –6,006002 (vi) –2 (vii) –3,5
(viii) –5,42 (ix) –5,9402 (x) –5,994002

(b) –6

(c) $y = -6x - 3$

5. (a) (i) 3m/s (ii) 2m/s (iii) 1,5m/s (iv) 1,1 m/s

(b) 1 m/s

(c), (d)

6. (a) –0,43, –0,35, 0,2, 0,8, 1,1

(b) 0,5

(c) 0,57

2.1 SOLUÇÕES

1. Para a curva $y = \sqrt{x}$ e o ponto $P(4, 2)$:

(a)

	x	Q	m_{PQ}
(i)	5	(5, 2,236068)	0,236068
(ii)	4,5	(4,5, 2,121320)	0,242641
(iii)	4,1	(4,1, 2,024846)	0,248457
(iv)	4,01	(4,01, 2,002498)	0,249844
(v)	4,001	(4,001, 2,000250)	0,249984
(vi)	3	(3, 1,732051)	0,267949
(vii)	3,5	(3,5, 1,870829)	0,258343
(viii)	3,9	(3,9, 1,974842)	0,251582
(ix)	3,99	(3,99, 1,997498)	0,250156
(x)	3,999	(3,999, 1,999750)	0,250016

(b) A inclinação parece ser $\frac{1}{4}$.

(c) $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ ou $y = \frac{1}{4}x + 1$

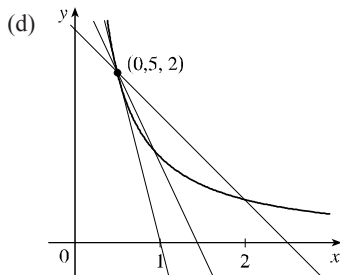
2. Para a curva $y = 1/x$ e o ponto $P(0{,}5, 2)$:

(a)

	x	Q	m_{PQ}
(i)	2	(2, 0,5)	−1
(ii)	1	(1, 1)	−2
(iii)	0,9	(0,9, 1,111111)	−2,222222
(iv)	0,8	(0,8, 1,25)	−2,5
(v)	0,7	(0,7, 1,428571)	−2,857143
(vi)	0,6	(0,6, 1,666667)	−3,333333
(vii)	0,55	(0,55, 1,818182)	−3,636364
(viii)	0,51	(0,51, 1,960784)	−3,921569
(ix)	0,45	(0,45, 2,222222)	−4,444444
(x)	0,49	(0,49, 2,040816)	−4,081633

(b) A inclinação parece ser -4.

(c) $y - 2 = -4(x - 0{,}5)$ ou $y = -4x + 4$.

(d)

3. Para a curva $f(x) = 1 + x + x^2$ e o ponto $P(1, 3)$:

(a)

	x	Q	m_{PQ}
(i)	2	(2, 7)	4
(ii)	1,5	(1,5, 4,75)	3,5
(iii)	1,1	(1,1, 3,31)	3,1
(iv)	1,01	(1,01, 3,0301)	3,01
(v)	1,001	(1,001, 3,003001)	3,001
(vi)	0	(0,1)	2
(vii)	0,5	(0,5, 1,75)	2,5
(viii)	0,9	(0,9, 2,71)	2,9
(ix)	0,99	(0,99, 2,9701)	2,99
(x)	0,999	(0,999, 2,997001)	2,999

(b) A inclinação parece ser 3.

(c) $y - 3 = 3(x - 1)$ ou $y = 3x$

4. Para a curva $y = 1 - 2x^3$ e o ponto $P(-1, 3)$:

(a)

	x	Q	m_{PQ}
(i)	–2	(–2, 17)	–14
(ii)	–1,5	(–1,5, 7,75)	–9,5
(iii)	–1,1	(–1,1, 3,662)	–6,62
(iv)	–1,01	(–1,01, 3,060602)	–6,0602
(v)	–1,001	(–1,001, 3,006006)	–6,006002
(vi)	0	(0,1)	–2
(vii)	–0,5	(–0,5, 1,25)	–3,5
(viii)	–0,9	(–0,9, 2,458)	–5,42
(ix)	–0,99	(–0,99, 2,940598)	–5,9402
(x)	–0,999	(–0,999, 2,994006)	–5,994002

(b) A inclinação parece ser -6.

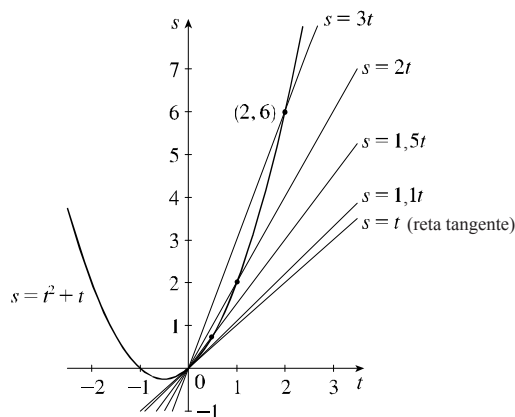
(c) $y - 3 = -6(x + 1)$ ou $6x + y + 3 = 0$

5. (a) A velocidade média entre os instantes 0 e h é

$$\frac{s(h)-s(0)}{h}=\frac{h^2+h-0}{h}=h+1.$$

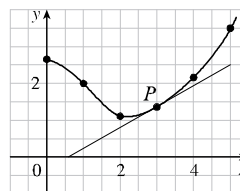
(i) [0, 2]: $2+1=3$ m/s
(ii) [0, 1]: $1+1=2$ m/s
(iii) [0, 0,5]: $0,5+1=1,5$ m/s
(iv) [0, 0,1]: $0,1+1=1,1$ m/s

(b) Conforme h se aproxima de 0, a velocidade aproxima-se de 1 m/s.

(c), (d)

6. (a) Inclinações das retas secantes:

x	m_{PQ}
0	$\frac{2,6-1,3}{0-3}\approx -0,43$
1	$\frac{2,0-1,3}{1-3}=-0,35$
2	$\frac{1,1-1,3}{2-3}=0,2$
4	$\frac{2,1-1,3}{4-3}=0,8$
5	$\frac{3,5-1,3}{5-3}=1,1$

(b) Fazemos a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas da parte (a): $\frac{1}{2}(0,2+0,8)=0,5$.

(c) Usando os pontos (0,6, 0) e (5, 2,5) do gráfico, a inclinação da tangente em P é cerca de $\frac{2,5-0}{5-0,6}\approx 0,57$.

2.2 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

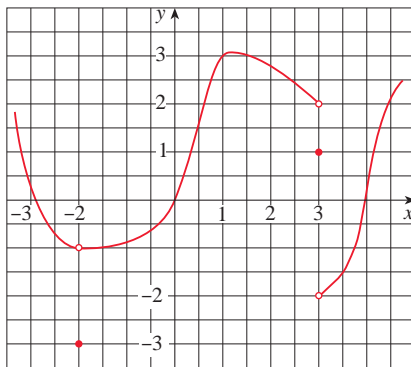
Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador.

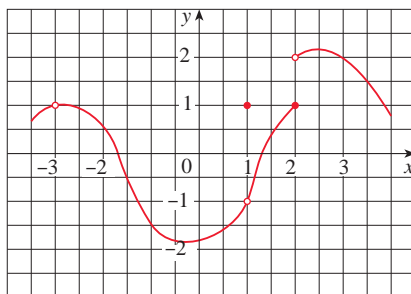
1. Para a função f cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$ (f) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

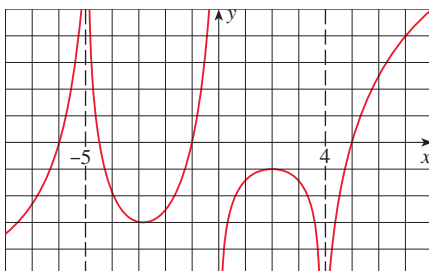
(g) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (i) $f(-2)$

2. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

3. Para a função g cujo gráfico é mostrado, determine o seguinte:

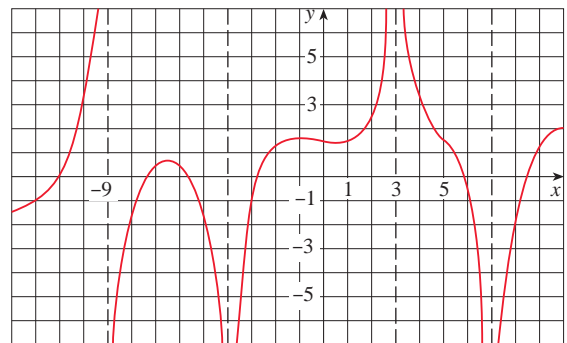
(a) $\lim_{x\to -6} g(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 4} g(x)$

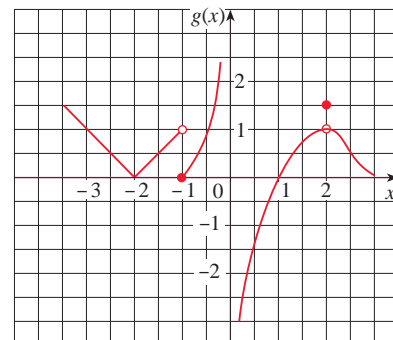
(e) As equações das assíntotas verticais.

4. Para a função f cujo gráfico é mostrado, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 7} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -4} f(x)$

(d) $\lim_{x\to -9^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -9^+} f(x)$

(f) As equações das assíntotas verticais.

5. Determine o valor do limite, se existir, a partir do gráfico dado.

(a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} g(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x\to -2} g(x)$ (e) $\lim_{x\to -1^-} g(x)$ (f) $\lim_{x\to -1} g(x)$

6-11 Avalie a função nos números dados (com precisão de seis casas decimais). Use os resultados para estimar o valor do limite, ou explique por que ele não existe.

6. $g(x) = \dfrac{x-1}{x^3-1}$;

$x = 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 0{,}9,\ 0{,}99,\ 1{,}8\ 1{,}6,\ 1{,}4,\ 1{,}2,\ 1{,}1,\ 1{,}01$;

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$

7. $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+3x-10}$;

$x = 3,\ 2{,}1,\ 2{,}01,\ 2{,}001,\ 2{,}0001,\ 2{,}00001$;

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1-x^2}{x^2+3x-10}$

8. $F(x) = \dfrac{(1/\sqrt{x}) - \frac{1}{5}}{x - 25}$;
$x = 26,\ 25{,}5,\ 25{,}1,\ 25{,}05,\ 24,\ 24{,}5,\ 24{,}9,$
$24{,}95,\ 24{,}99$;
$\lim_{x \to 25} \dfrac{(1/\sqrt{x}) - \frac{1}{5}}{x - 25}$

9. $F(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$;
$t = 1{,}5,\ 1{,}2,\ 1{,}1,\ 1{,}01,\ 1{,}001$;
$\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$

10. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;
$x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}2,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01$;
$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

11. $g(x) = \sqrt{x}\ \ln x$;
$x = 1,\ 0{,}5\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}001$;
$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\ \ln x$

12-13 Determine o limite infinito.

12. $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^8}$

13. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{x \operatorname{sen} \pi x}$

14. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta na parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que tendam a 0.

15. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

traçando o gráfico da função $y = (6^x - 2^x)/x$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta na parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que tendam a 0.

2.2 RESPOSTAS

1. (a) 3 (b) 2 (c) –2 (d) Não existe
(e) 1 (f) –1 (g) –1 (h) –1 (i) –3

2. (a) 2 (b) –1 (c) 1 (d) 1
(e) 2 (f) Não existe

3. (a) 0 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$
(e) $x = -5$, $x = 0$, $x = 4$

4. (a) ∞ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) ∞ (e) $-\infty$
(f) $x = -9$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 7$

5. (a) 0 (b) Não existe (c) 1 (d) 0
(e) 1 (f) Não existe

6. 0,806452, 0,641026, 0,510204, 0,409836, 0,369004, 0,336689, 0,165563, 0,193798, 0,229358, 0,274725, 0,302115, 0,330022; $\frac{1}{3}$

7. –1, –

4,8028, –43,368, –429,08, –4 286,2, –42 858, $-\infty$

8. –0,003884, –0,003941, –0,003988, –0,003994, –0,003999, –0,004124, –0,004061, –0,004012, –0,004006, –0,004001; –0,004.

9. 0,643905, 0,656488, 0,661358, 0,666114, 0,666611; $\frac{2}{3}$

10. 0,459698, 0,489670, 0,493369, 0,496261, 0,498336, 0,499583, 0,499896, 0,499996; 0,5

11. 0, –0,490129, –0,728141, –0,669866, –0,460517, –0,374648, –0,218442; 0

12. ∞

13. $-\infty$

14. 4

15. (a) 1,10s

2.2 SOLUÇÕES

1. (a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

(b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -2$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe porque os limites na parte (b) e na parte (c) não são iguais.

(e) $f(3) = 1$

(f) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1$

(g) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$

(h) $\lim_{x \to -2} f(x) = -1$

(i) $f(-2) = -3$

2. (a) $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$

(b) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

(c) $\lim_{x \to -3} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe porque os limites na parte (d) e na parte (e) não são iguais.

3. (a) $\lim_{x \to -6} g(x) = 0$

(b) $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \infty$

(c) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x \to 4} g(x) = -\infty$

(e) As equações das assíntotas verticais: $x = -5$, $x = 0$, $x = 4$

4. (a) $\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x \to 7} f(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x \to -4} f(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x \to -9^-} f(x) = \infty$

(e) $\lim_{x \to -9^+} f(x) = -\infty$

(f) As equações das assíntotas verticais: $x = -9$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 7$

5. (a) $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$

(b) $\lim_{x \to 0} g(x) =$ não existe

(c) $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$

(d) $\lim_{x \to -2} g(x) = 0$

(e) $\lim_{x \to -1^-} g(x) = 1$

(f) $\lim_{x \to -1} g(x) =$ não existe

6. Para $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$:

x	$g(x)$
0,2	0,806452
0,4	0,641026
0,6	0,510204
0,8	0,409836
0,9	0,369004
0,99	0,336689

x	$g(x)$
1,8	0,165563
1,6	0,193798
1,4	0,229358
1,2	0,274725
1,1	0,302115
1,01	0,330022

Parece que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1} = 0,\overline{3} = \frac{1}{3}$.

7. Para $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 10}$:

x	$g(x)$
3	–1
2,1	–4,8028
2,01	–43,368
2,001	–429,08
2,0001	–4 286,2
2,00001	–42 858

Parece que $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 10} = -\infty$.

8. Para $F(x) = \dfrac{(1/\sqrt{x}) - \frac{1}{5}}{x - 25}$:

x	$F(x)$
26	–0,003884
25,5	–0,003941
25,1	–0,003988
25,05	–0,003994
25,01	–0,003999

x	$F(x)$
24	–0,004124
24,5	–0,004061
24,9	–0,004012
24,95	–0,004006
24,99	–0,004001

Parece que $\lim_{x \to 25} F(x) = -0,004$.

9. Para $F(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$:

t	$F(t)$
1,5	0,643905
1,2	0,656488
1,1	0,661358
1,01	0,666114
1,001	0,666611

Parece que $\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1} = 0,\overline{6} = \frac{2}{3}$.

10. Para $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$:

x	$f(x)$
1	0,459698
0,5	0,489670
0,4	0,493369
0,3	0,496261
0,2	0,498336
0,1	0,499583
0,05	0,499896
0,01	0,499996

Parece que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = 0,5$.

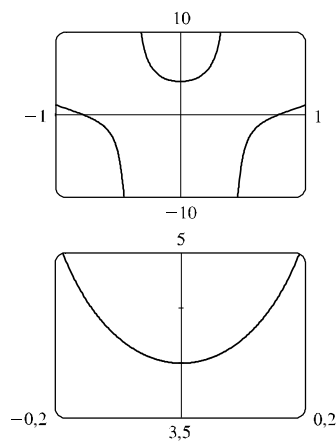
11. Para $g(x) = \sqrt{x} \ln x$:

x	$g(x)$
1	0
0,5	–0,490129
0,1	–0,728141
0,05	–0,669866
0,01	–0,460517
0,005	–0,374648
0,001	–0,218442

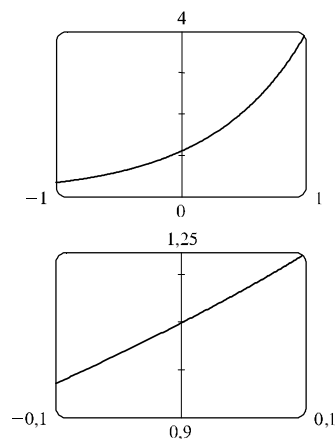
à medida que x fica menor, $g(x)$ aumenta por meio de valores negativos e lentamente se aproxima de 0. Parece que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$.

12. $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^8} = \infty$ uma vez que $(x - 3) \to 0$ quando $x \to 3$ e $\dfrac{1}{(x-3)^8} > 0$.

13. $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x+1}{x \operatorname{sen} \pi x} = -\infty$ uma vez que $\dfrac{x+1}{x} \to 2$ quando $x \to 1$ e $\operatorname{sen} \pi x \to 0$ por meio de valores negativos quando $x \to 1^+$.

14. (a) A partir dos seguintes gráficos, parece que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(4x)}{x} = 4$.

(b)

x	$f(x)$
±0,1	4,227932
±0,01	4,002135
±0,001	4,000021
±0,0001	4,000000

15. (a) A partir dos seguintes gráficos, parece que $\lim_{x \to 0} \dfrac{6^x - 2^x}{x} \approx 1,10$.

(b)

x	$f(x)$
–0,01	1,085052
–0,001	1,097248
–0,0001	1,098476
0,0001	1,098749
0,001	1,099978
0,01	1,112353

2.3 CÁLCULOS USANDO PROPRIEDADES DOS LIMITES

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

1-5 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

1. $\lim_{x\to 0} (5x^2 - 2x + 3)$

2. $\lim_{x\to 3} (x^2 + 2)(x^2 - 5x)$

3. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x^2 + 4x - 3}$

4. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

5. $\lim_{t\to -2} (t+1)^9(t^2 - 1)$

6-20 Calcule o limite, se existir.

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x + 12}{x+3}$

7. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3}$

8. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

10. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2 - 25}{h}$

11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$

12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$

13. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^3 - t}{t^2 - 1}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 3}{x+1}$

15. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 + t - 6}{t^2 - 4}$

16. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t} - \sqrt{2}}{t}$

17. $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right]$

18. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x-2}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$

21. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\cos^4 x = 0$

22. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 3 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
(b) Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?
(c) Esboce o gráfico de f.

23. Seja

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x < -1 \\ (x+2)^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}.$$

(a) Encontre $\lim_{x\to -1^-} g(x)$ e $\lim_{x\to -1^+} g(x)$.
(b) Existe $\lim_{x\to -1} g(x)$?
(c) Esboce o gráfico de g.

24. Seja $g(x) = [\![x/2]\!]$.

(a) Esboce o gráfico de g.
(b) Calcule cada um dos seguintes limites, se existir.

(i) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (iii) $\lim_{x\to 1} g(x)$

(iv) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(c) Para quais valores de a o $\lim_{x\to a} g(x)$ existe?

2.3 RESPOSTAS

1. 75

2. –174

3. $\frac{1}{2}$

4. $\frac{4}{9}$

5. –3

6. Não existe

7. –7

8. $-\frac{1}{5}$

9. –3

10. –10

11. –3

12. –1

13. 1

14. Não existe

15. $\frac{5}{4}$

16. $-\sqrt{2}/4$

17. $\frac{1}{2}$

18. $-\frac{1}{4}$

19. $\frac{2}{3}$

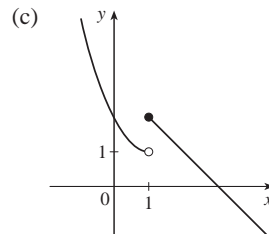
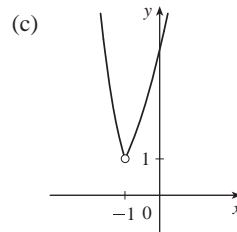
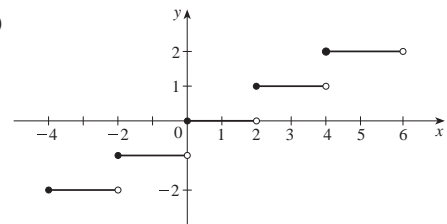
20. $\frac{1}{16}$

21. 0

22. (a) 1,2 (b) Não

(c)

23. (a) 1,1 (b) Sim

(c)

24. (a)

(b) (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 1 (v) 0
(vi) Não existe

(c) Todos os valores reais exceto os números inteiros pares

2.3 SOLUÇÕES

1. $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

$= \lim_{x\to 4} 5x^2 - \lim_{x\to 4} 2x + \lim_{x\to 4} 3$ (Propriedades do Limite 2 e 1)

$= 5 \lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x + 3$ (3 e 7)

$= 5(4)^2 - 2(4) + 3 = 75$ (9 e 8)

2. $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

$= \lim_{x\to 3}(x^3 + 2) \lim_{x\to 3}(x^2 - 5x)$ (Propriedade do Limite 4)

$= \left(\lim_{x\to 3} x^3 + \lim_{x\to 3} 2\right)\left(\lim_{x\to 3} x^2 - 5 \lim_{x\to 3} x\right)$ (1, 2 e 3)

$= (3^3 + 2)(3^2 - 5 \cdot 3)$ (9, 7 e 8)

$= 29(-6) = -174$

3. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

$= \dfrac{\lim_{x\to -1}(x - 2)}{\lim_{x\to -1}(x^2 + 4x - 3)}$ (Propriedade do Limite 5)

$= \dfrac{\lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 2}{\lim_{x\to -1} x^2 + 4 \lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 3}$ (2, 1 e 3)

$= \dfrac{(-1) - 2}{(-1)^2 + 4(-1) - 3} = \dfrac{1}{2}$ (8, 7 e 9)

4. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

$= \left[\dfrac{\lim_{x\to 1}(x^4 + x^2 - 6)}{\lim_{x\to 1}(x^4 + 2x + 3)}\right]^2$ (Propriedades do Limite 6 e 5)

$= \left(\dfrac{\lim_{x\to 1} x^4 + \lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{x\to 1} 6}{\lim_{x\to 1} x^4 + 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 3}\right)^2$ (1, 2 e 3)

$= \left(\dfrac{1^4 + 1^2 - 6}{1^4 + 2 \cdot 1 + 3}\right)^2$ (9, 7 e 8)

$= \left(\frac{-4}{6}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

5. $\lim_{t\to -2}(t + 1)^9(t^2 - 1)$

$= \lim_{t\to -2}(t + 1)^9 \lim_{t\to -2}(t^2 - 1)$ (Propriedade do Limite 4)

$= \left[\lim_{t\to -2}(t + 1)\right]^9 \lim_{t\to -2}(t^2 - 1)$ (6)

$= \left[\lim_{t\to -2} t + \lim_{t\to -2} 1\right]^9 \left[\lim_{t\to -2} t^2 - \lim_{t\to -2} 1\right]$ (1 e 2)

$= [(-2) + 1]^9 [(-2)^2 - 1] = -3$ (8, 7 e 9)

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x + 12}{x + 3}$ não existe, uma vez que $x + 3 \to 0$ mas $x^2 - x + 12 \to 24$ quando $x \to -3$

7. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x \quad - x + 12}{x + 3} \qquad \lim_{x\to -3} \dfrac{(x + 3)(x - 4)}{x + 3}$

$= \lim_{\to -} (\quad - 4) = -3 - 4 = -7$

8. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to -2} \dfrac{x - 2}{(x - 3)(x + 2)}$

$= \lim_{x\to -2} \dfrac{1}{x - 3} = -\dfrac{1}{5}$

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 2)(x - 1)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x + 2}{x - 2} = \dfrac{1 + 2}{1 - 2} = -3$

10. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h - 5)^2 - 25}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(h^2 - 10h + 25) - 25}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 10h}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 10)$

$= -10$

11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1}$

$= \lim_{x\to -1}(x - 2) = -3$

12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \dfrac{1^2 - 1 - 2}{1 + 1} = -1$

13. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^3 - t}{t^2 - 1} = \lim_{t\to 1} \dfrac{t(t^2 - 1)}{t^2 - 1} = \lim_{t\to 1} t = 1$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 1}$ não existe, uma vez que, quando $x \to -1$, numerador $\to -1$ e denominador $\to 0$.

15. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 + t - 6}{t^2 - 4} = \lim_{t\to 2} \dfrac{(t + 3)(t - 2)}{(t + 2)(t - 2)} = \lim_{t\to 2} \dfrac{t + 3}{t + 2} = \dfrac{5}{4}$

16. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2 - t} - \sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2 - t} - \sqrt{2}}{t} \cdot \dfrac{\sqrt{2 - t} + \sqrt{2}}{\sqrt{2 - t} + \sqrt{2}}$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{-t}{t\left(\sqrt{2 - t} + \sqrt{2}\right)}$

$= \lim_{t\to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{2 - t} + \sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

17. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

18. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{1/x-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}$

19. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{3x}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}$

$\displaystyle =\frac{\sqrt{1}+1}{3}=\frac{2}{3}$

20. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-\sqrt{3x-2}\right)\left(x-\sqrt{3x-2}\right)}{(x^2-4)\left(x-\sqrt{3x-2}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-4)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$\displaystyle =\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$\displaystyle =\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4}\right)}=\frac{1}{16}$

21. $1\le \cos x\le 1 \Rightarrow 0\le \cos^4 x\le 1\Rightarrow 0\le \sqrt{x}\,\cos^4 x\le \sqrt{x}$.

Mas $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}0=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$. Portanto, pelo Teorema do Confronto, $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos^4 x=0$

22. (a) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-2x+2)$

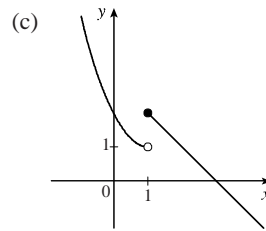
$\displaystyle =\lim_{x\to 1^-}x^2-2\lim_{x\to 1^-}x+\lim_{x\to 1^-}2$

$=1^2-2+2=1$

$\displaystyle \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=\lim_{x\to 1^+}3-\lim_{x\to 1^+}x$

$=3-1=2$

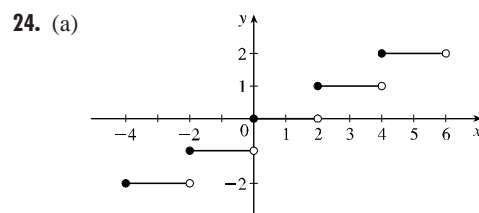
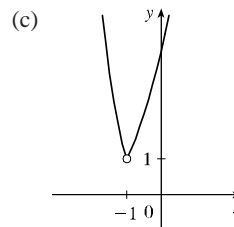
(b) $\displaystyle \lim_{x\to 1}f(x)$ não existe porque $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)$.

(c)

23. (a) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x^3\right)=-\left(-1\right)^3=1,$

$\displaystyle \lim_{x\to -1^+}g(x)=\lim_{x\to -1^+}(x+2)^2=(-1+2)^2=1$

(b) Pela parte (a), $\displaystyle \lim_{x\to -1}g(x)=1$.

(c)

24. (a)

b) (i) $\displaystyle \lim_{x\to 1^+}g(x)=0$ uma vez que $[\![x/2]\!]=0$ para $0\le x<2$.

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-}g(x)=0$ uma vez que $[\![x/2]\!]=0$ para $0\le x<2$.

(iii) $\displaystyle \lim_{x\to 1}g(x)=0$ uma vez que $[\![x/2]\!]=0$ para $0\le x<2$.

(iv) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}g(x)=1$ uma vez que $[\![x/2]\!]=1$ para $2\le x<4$.

(v) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-}g(x)=0$ uma vez que $[\![x/2]\!]=0$ para $0\le x<2$.

(vi) $\displaystyle \lim_{x\to 2}g(x)$ não existe porque $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}g(x)\neq\lim_{x\to 2^-}g(x)$.

(c) $\displaystyle \lim_{x\to a}g(x)$ existe, exceto quando a é um inteiro par.

2.4 A DEFINIÇÃO PRECISA DE LIMITE

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador.

1. Quão perto de 3 temos que tomar x de modo que $6x + 1$ esteja a uma distância (a) 0,1 e (b) 0,01 de 19?

2. Quão perto de 2 temos que tomar x de modo que $8x - 5$ esteja a uma distância (a) 0,01, (b) 0,001 e (c) 0,0001 de 11?

3. Para o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x + 1}{3x - 4} = 4{,}5$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondem a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

4-7 Demonstre cada afirmação usando a definição com ε, δ de limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

4. $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$

5. $\lim_{x \to 4} (5 - 2x) = -3$

6. $\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3$

7. $\lim_{x \to -1} (3 - 4x) = 7$

8-10 Demonstre cada afirmação usando a definição com ε e δ de limite.

8. $\lim_{x \to 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$

9. $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{7}{3}$

10. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

2.4 RESPOSTAS

1. (a) $|x - 3| < \frac{1}{60}$ (b) $|x - 3| < \frac{1}{600}$

2. (a) $\frac{1}{800}$ (b) $\frac{1}{8\,000}$ (c) $\frac{1}{80\,000}$

3. 0,09 (ou qualquer número positivo menor); 0,02 (ou qualquer número positivo menor)

2.4 SOLUÇÕES

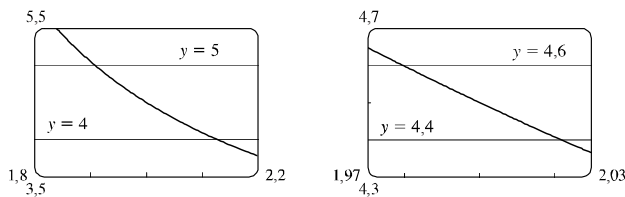
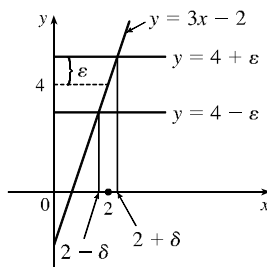
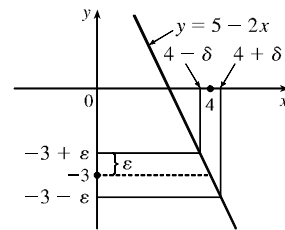
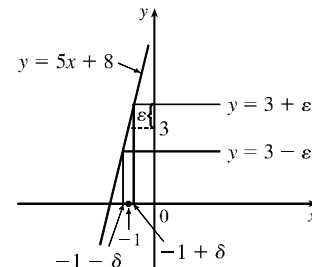
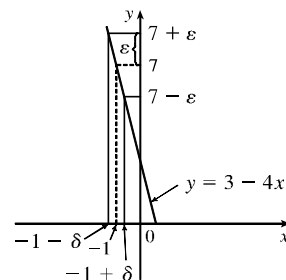
1. (a) $|(6x+1)-19| < 0{,}1 \Leftrightarrow |6x-18| < 0{,}1 \Leftrightarrow$
$6|x-3| < 0{,}1 \Leftrightarrow |x-3| < (0{,}1)/6 = \frac{1}{60}$

(b) $|(6x+1)-19| < 0{,}01 \Leftrightarrow |x-3| < (0{,}01)/6 = \frac{1}{600}$

2. (a) $|(8x-5)-11| < 0{,}01 \Leftrightarrow |8x-16| < 0{,}01 \Leftrightarrow$
$8|x-2| < 0{,}01 \Leftrightarrow |x-2| < (0{,}01)/8 = \frac{1}{800}$

(b) $|(8x-5)-11| < 0{,}001 \Leftrightarrow |x-2| < (0{,}001)/8 = \frac{1}{8\,000}$

(c) $|(8x-5)-11| < 0{,}0001 \Leftrightarrow |x-2| < (0{,}0001)/8 = \frac{1}{80\,000}$

3. Para $\varepsilon = 0{,}5$, precisamos que $1{,}91 \le x \le 2{,}125$. Portanto, uma vez que $|2-1{,}91| = 0{,}09$ e $|2-2{,}125| = 0{,}125$, tomamos $0 < \delta \le 0{,}09$. Para $\varepsilon = 0{,}1$, precisamos que $1{,}980 \le x \le 2{,}021$. Portanto, uma vez que $|2-1{,}980| = 0{,}02$ e $|2-2{,}021| = 0{,}021$, tomamos $\delta = 0{,}02$ (ou qualquer número positivo menor).

4. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-2| < \delta$, então $|(3x-2)-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $|x-2| < \varepsilon/3$. Portanto, se escolhemos $\delta = \varepsilon/3$, então $|x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-2)-4| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite,
$\lim_{x\to 2} (3x-2) = 4$.

5. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-4| < \delta$, então $|(5x-2x)-(-3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |-2x+8| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-4| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $|x-4| < \varepsilon/2$. Logo, escolhemos $\delta = \varepsilon/2$. Então $|x-4| < \delta \Rightarrow$ $|(5-2x)-(-3)| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite,
$\lim_{x\to 4} (5-2x) = -3$.

6. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-(-1)| < \delta$, então $|(5x+8)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x+5| < \varepsilon \Leftrightarrow 5|x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $|x-(-1)| < \varepsilon/5$. Portanto, se escolhemos $\delta = \varepsilon/5$, então $|x-(-1)| < \delta \Rightarrow |(5x+8)-3| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite, $\lim_{x\to -1} (5x+8) = 3$.

7. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-(-1)| < \delta$, então $|(3-4x)-7| < \varepsilon \Leftrightarrow |-4x-4| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x+1| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $|x-(-1)| < \varepsilon/4$. Portanto, escolhemos $\delta = \varepsilon/4$. Então $|x-(-1)| < \delta \Rightarrow |(3-4x)-7| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite, $\lim_{x\to -1} (3-4x) = 7$.

8. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-2| < \delta$ então $\left|\frac{x}{7} - \frac{2}{7}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{7}|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < 7\varepsilon$. Portanto, tomamos $\delta = 7\varepsilon$. Então, $|x-2| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{x}{7} - \frac{2}{7}\right| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite, $\lim_{x \to 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$.

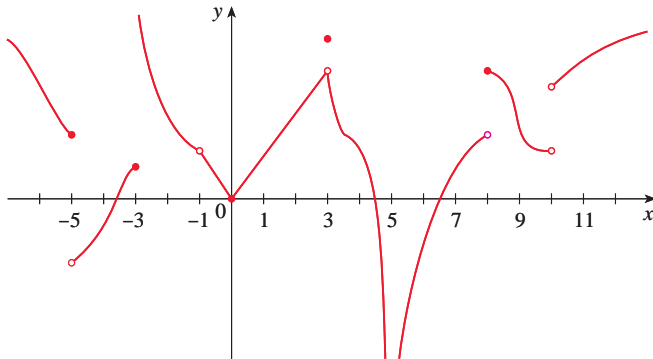
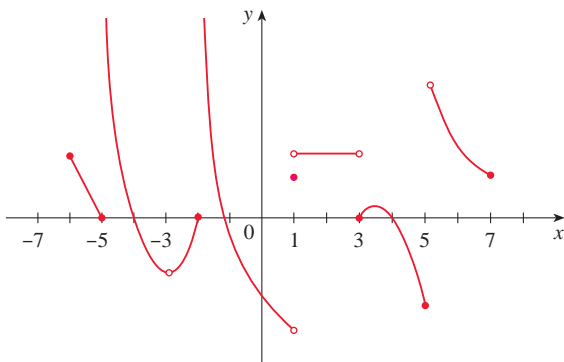
9. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-4| < \delta$ então $\left|\left(\frac{x}{3}+1\right) - \frac{7}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3}|x-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-4| < 3\varepsilon$. Portanto, tomamos $\delta = 3\varepsilon$. Então, $|x-4| < \delta \Rightarrow \left|\left(\frac{x}{3}+1\right) - \frac{7}{3}\right| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite, $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x}{3}+1\right) = \frac{7}{3}$.

10. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos de $\delta > 0$ tal que se $|x-2| < \delta$ então $\left|\frac{x^2+x-6}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $|x+3-5| < \varepsilon$ (para $x \neq 2$) $\Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon$. Portanto, tomamos $\delta = \varepsilon$, e certamente $|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \varepsilon$. Assim, pela definição de limite, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$.

2.5 CONTINUIDADE

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

1. (a) Do gráfico de f, diga os números nos quais f é descontínua e explique por quê.

(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.

2. Do gráfico de g, diga os intervalos nos quais g é contínua.

3-6 Use a definição de continuidade e as propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número.

3. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6, \quad a = 3$

4. $f(x) = x^2 + (x - 1)^9, \quad a = 2$

5. $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 9}, \quad a = 5$

6. $g(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{(t+1)^4}, \quad a = -8$

7-10 Use a definição da continuidade e as propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

7. $f(x) = x + \sqrt{x - 1}, \quad [1, \infty)$

8. $f(x) = (x^2 - 1)^8, \quad (-\infty, \infty)$

9. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}, \quad [-4, 4]$

10. $F(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}, \quad (-\infty, 3)$

11-16 Explique por que a função é descontínua no número a dado. Esboce o gráfico da função.

11. $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \qquad a = 1$

12. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \qquad a = -1$

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 6 & \text{se } x = -1 \end{cases} \qquad a = -1$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 3 & \text{se } x = 4 \end{cases} \qquad a = 4$

16. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

17-25 Use os Teoremas 4, 5 e 9 para mostrar que cada função é contínua em seu domínio. Diga qual é o domínio.

17. $f(x) = (x + 1)(x^3 + 8x + 9)$

18. $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

19. $H(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

20. $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

21. $h(x) = \sqrt[5]{x - 1}(x^2 - 2)$

22. $g(t) = \dfrac{1}{t + \sqrt{t^2 - 4}}$

23. $F(t) = (t^2 + t + 1)^{3/2}$

24. $H(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{5 + x}}$

25. $L(x) = |x^3 - x|$

26. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 3 \\ 5 - x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}.$$

Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

27-31 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

27. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ 3x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{se } x < 0 \\ (x+1)^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1/x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

31. $f(x) = [\![2x]\!]$

32. Se atualmente seu salário mensal for de \$ 3 200 e você tiver um aumento garantido de 3% a cada 6 meses, seu salário mensal será dado por

$$S(t) = 3\,200(1{,}03)^{[\![t/6]\!]}$$

onde t é medido em meses. Esboce um gráfico da função de seu salário $0 \leq t \leq 24$ e discuta sua continuidade.

33. Encontre os valores de c e d que tornam h contínua em $\mathbb{R}$.

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1 \\ cx^2 + d & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

34. Se $g(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$, mostre que há um número c tal que $g(c) = -1$.

35-38 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

35. $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad (0, 1)$

36. $x^5 - 2x^4 - x - 3 = 0, \quad (2, 3)$

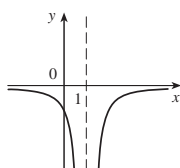
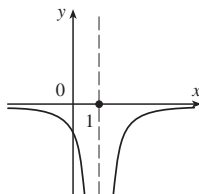
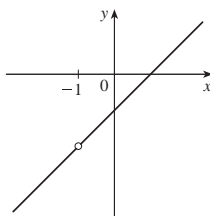
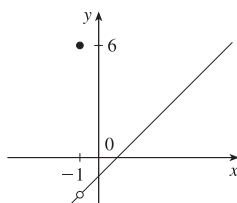
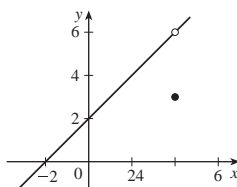
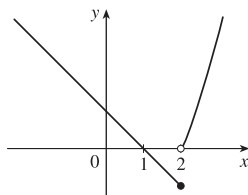
37. $x^3 + 2x = x^2 + 1, \quad (0, 1)$

38. $x^2 = \sqrt{x+1}, \quad (1, 2)$

2.5 RESPOSTAS

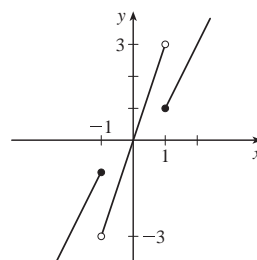
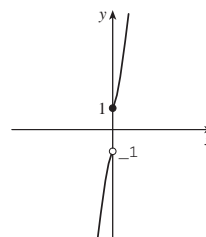
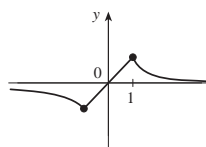
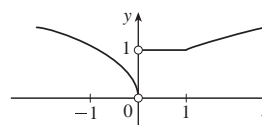
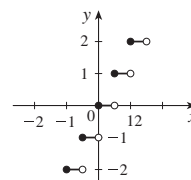
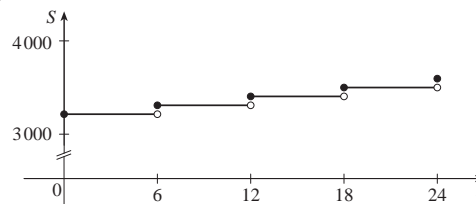
1. (a) –5 (salto), –3 (infinito), –1 (indefinido), 3 (removível), 5 (infinito), 8 (salto), 10 (indefinido)
(b) –5, esquerda; –3, esquerda; –1, nenhum; 3, nenhum; 5, nenhum; 8, direita; 10, nenhum

2. [–6, –5], (–5, –3), (–3, –2), (–2, 1), (1, 3), [3, 5], (5, 7]

11. $f(1)$ indefinido

12. $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe.

13. $f(-1)$ não é definido

14. $\lim_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

15. $\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$

16. $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe

17. $\mathbb{R}$ **18.** $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ **19.** $(-1, \infty)$

20. $[-5, 5]$ **21.** $\mathbb{R}$ **22.** $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

23. $\mathbb{R}$ **24.** $(-\infty, -5) \cup [2, \infty)$ **25.** $\mathbb{R}$

27. –1, contínua à esquerda; 1 contínua à direita

28. 0, contínua à direita

29. Contínua em todos os pontos:

30. 0, nenhum

31. $\{n/2 \mid n$ um inteiro$\}$, contínua à direita

32. Descontínua em $t = 6$, 12, 8, 24; contínua à direita em $t = 6$, 12, 18

33. $c = 2$, $d = 0$

2.5 SOLUÇÕES

1. (a) A seguir são listados os números em que f é descontínua e o respectivo tipo de descontinuidade: -5 (salto), -3 (infinito), -1 (indefinido), 3 (removível), 5 (infinito), 8 (salto), 10 (indefinido).

(b) f é contínua à esquerda em -5 e -3, e contínua à direita em 8. Não é contínua em lado algum nos pontos -1, 3, 5 e 10.

2. g é contínua sobre $[-6,-5]$, $(-5,-3)$, $(-3,-2]$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$, $[3, 5]$ e $(5, 7]$.

3.
$$\lim_{x\to 3}(x^4 - 5x^3 + 6) = \lim_{x\to 3} x^4 - 5\lim_{x\to 3} x^3 + \lim_{x\to 3} 6 = 3^4 - 5\left(3^3\right) + 6 = -48 = f(3)$$

Assim, f é contínua em 3.

4.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\left[x^2 + (x-1)^9\right]\\ &= \lim_{x\to 2} x^2 + \left(\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1\right)^9\\ &= 2^2 + (2-1)^9 = 5 = f(2)\end{aligned}$$

Assim, f é contínua em 2.

5.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5}\left(1 + \sqrt{x^2 - 9}\right)\\ &= \lim_{x\to 5} 1 + \sqrt{\lim_{x\to 5} x^2 - \lim_{x\to 5} 9}\\ &= 1 + \sqrt{5^2 - 9} = 5 = f(5)\end{aligned}$$

Assim, f é contínua em 5.

6.
$$\begin{aligned}\lim_{t\to -8} g(t) &= \lim_{t\to -8}\frac{\sqrt[3]{t}}{(t+1)^4} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{t\to -8} t}}{\left(\lim_{t\to -8} t + 1\right)^4}\\ &= \frac{\sqrt[3]{-8}}{(-8+1)^4} = -\frac{2}{2\,401} = g(-8)\end{aligned}$$

Assim, g é contínua em -8.

7. Para $a > 1$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(x + \sqrt{x-1}\right)\\ &= \lim_{x\to a} x + \sqrt{\lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} 1}\\ &= a + \sqrt{a-1} = f(a),\end{aligned}$$

de modo que, f é contínua sobre $(1, \infty)$. Um cálculo semelhante mostra que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$ logo f é contínua à direita em 1. Assim f é contínua em $[1, \infty)$.

8. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(x^2 - 1)^8 = \left(\lim_{x\to a} x^2 - \lim_{x\to a} 1\right)^8\\ &= (a^2 - 1)^8 = f(a).\end{aligned}$$

Assim, f é contínua sobre $(-\infty, \infty)$.

9. Para $-4 < a < 4$, temos

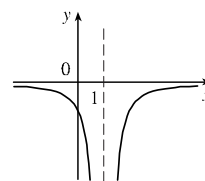
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} x\sqrt{16 - x^2}\\ &= \lim_{x\to a} x\sqrt{\lim_{x\to a} 16 - \lim_{x\to a} x^2}\\ &= a\sqrt{16 - a^2} = f(a)\end{aligned}$$

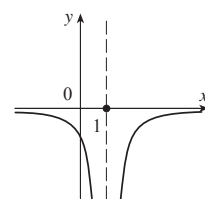
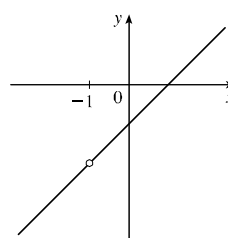
de modo que, f é contínua sobre $(-4, 4)$. Da mesma forma, obtemos $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0 = f(4)$ e $\lim_{x\to -4^+} f(x) = 0 = f(-4)$, logo f é contínua à esquerda em 4 e à direita em -4. Assim, f é contínua em $[-4, 4]$.

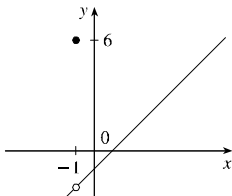
10. Para a < 3,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} F(x) &= \lim_{x\to a}\frac{x+1}{x-3} = \frac{\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} 3}\\ &= \frac{a+1}{a-3} = F(a)\end{aligned}$$

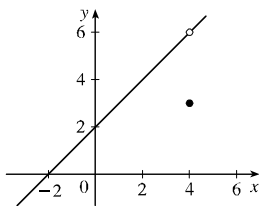
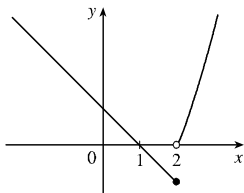
de modo que, F é contínua em $(-\infty, 3)$.

11. $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ é descontínua em 1, uma vez que $f(1)$ não está definido.

12. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right]$ não existe.

Portanto, f é descontínua em 1.

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ é descontínua em -1 porque $f(-1)$ não está definido.

14. Uma vez que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ para $x \neq -1$, temos

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} (x - 1) = -2$. Mas $f(-1) =$ 6, logo $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$. Portanto, f é descontínua em -1.

15. Uma vez que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$ se $x \neq 4$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 2)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 2) \\ &= 4 + 2 = 6.\end{aligned}$$

Mas $f(4) = 3$, logo, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$. Portanto, f é descontínua em 4.

16. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (1 - x) = 1 - 2 = -1$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 2x) = (2)^2 - 2(2) = 0$. Uma vez que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe e, portanto, f é descontínua em 2 [pela Observação 2 após a Definição 1].

17. $f(x) = (x + 1)(x^3 + 8x + 9)$ é uma função polinomial, logo, pelo Teorema 5, é contínua em $\mathbb{R}$.

18. $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$ é uma função racional, logo, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\left\{x \,\middle|\, (3x - 1)(2x + 1) \neq 0\right\} = \left\{x \,\middle|\, x \neq -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right\}$.

19. $g(x) = x + 1$, uma função polinomial, é contínua (pelo Teorema 5) e $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua sobre $[0, \infty]$ pelo Teorema 7, de modo que, $f(g(x)) = \sqrt{x + 1}$ é contínua em $[-1, \infty)$ pelo Teorema 9. Pelo Teorema 4 #5, $H(x) = 1/\sqrt{x + 1}$ é contínua em $(-1, \infty)$.

20. $G(t) = 25 - t^2$ é função polinomial, logo é contínua (Teorema 5). $F(x) = \sqrt{x}$ é contínua pelo Teorema 7. Logo, pelo Teorema 9, $F(G(t)) = \sqrt{25 - t^2}$ é contínua em seu domínio, que é $\left\{t \,\middle|\, 25 - t^2 \geq 0\right\} = \left\{t \,\middle|\, |t| \leq 5\right\} = [-5, 5]$. Além disso, $2t$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo, pelo Teorema 4 #1, $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$ é contínua em seu domínio, que é $[-5, 5]$.

21. $g(x) = x - 1$ e $G(x) = x^2 - 2$ são ambas funções polinomiais, logo, pelo Teorema 5, elas são contínuas. Ademais $f(x) = \sqrt[5]{x}$ é contínua pelo Teorema 7, logo $f(g(x)) = \sqrt[5]{x - 1}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim o produto $h(x) = \sqrt[5]{x - 1}(x^2 - 2)$ é contínuo em $\mathbb{R}$ pelo Teorema 4 #4.

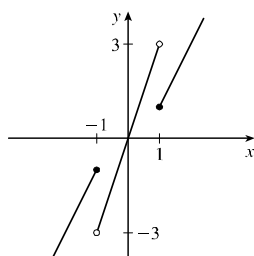
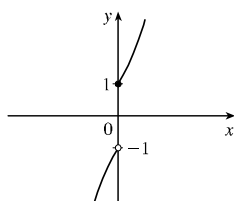
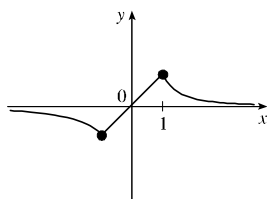
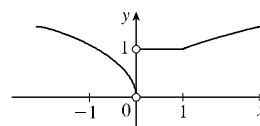
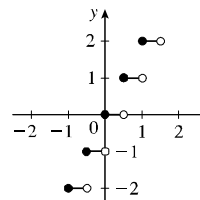
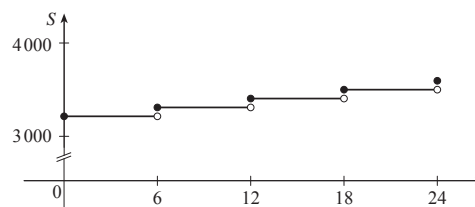
22. $G(t) = t^2 - 4$ é contínua, é uma vez que é uma função polinomial (Teorema 5). $F(x) = \sqrt{x}$ é contínua pelo Teorema 7. Logo, pelo Teorema 9, $F(G(t)) = \sqrt{t^2 - 4}$ é contínua em seu domínio, que é $D = \left\{t \,\middle|\, t^2 - 4 \geq 0\right\} = \{t \,|t| \geq 2\}$. Além disso, t é contínua, de modo que $t + \sqrt{t^2 - 4}$ é contínua em D pelo Teorema 4 #1. Assim, pelo Teorema 4 #5, $g(t) = 1/(t + \sqrt{t^2 - 4})$ é contínua em seu domínio, que é $\{t \in D \mid t + \sqrt{t^2 - 4} \neq 0\}$. Mas, se $t + \sqrt{t^2 - 4} = 0$, então $\sqrt{t^2 - 4} = -t \Rightarrow t^2 - 4 = t^2 \Rightarrow -4 = 0$ que é falso. Logo, o domínio de g é $\{t \in D \,\big|\, |t| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

23. Uma vez que o discriminante de $t^2 + t + 1$ é negativo, $t^2 + t + 1$ sempre é positiva. Logo, o domínio de $F(t)$ é $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 5, a função polinomial $(t^2 + t + 1)^3$ é contínua. Pelos Teoremas 7 e 9, a função composta $F(t) = \sqrt{(t^2 + t + 1)^3}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

24. $H(x) = \sqrt{(x - 2)/(5 + x)}$. O domínio é $\{x \mid (x - 2)/(5 + x) > 0\} = (-\infty, -5) \cup [2, \infty)$ pelos métodos do Apêndice A. Pelo Teorema 5, a função racional $(x - 2)/(5 + x)$ é contínua. Uma vez que a função raiz quadrada é contínua (Teorema 7), a função composta $H(x) = \sqrt{(x - 2)/(5 + x)}$ é contínua em seu domínio pelo Teorema 9.

25. $g(x) = x^3 - x$ é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que é uma função polinomial [Teorema 5(a)], e $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, $L(x) = |x^3 - x|$ é contínua em $\mathbb{R}$ pelo Teorema 9.

26. f é contínua em $(-\infty, 3)$ e $(3, \infty)$, uma vez que em cada um desses intervalos é uma função polinomial. Ademais, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (5 - x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x - 1) = 2$, de modo que, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$. Como $f(3) = 5 - 3 = 2$, f também é contínua 3. Assim, f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

27. f é contínua em $(\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \infty)$ uma vez que em cada um desses intervalos é uma função polinomial. Agora $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x + 1) = -1$ e $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 3x = -3$, logo f é descontínua em -1. Uma vez que $f(-1) = -1$, f é contínua à esquerda em -1. Do mesmo modo, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x = 3$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1$, logo, f é descontínua em 1. Uma vez que $f(1) = 1$, f é contínua à direita em 1.

28. f é contínua em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ uma vez que em cada um desses intervalos é uma função polinomial. Agora $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1)^3 = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1)^3 = 1$. Assim, $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, de modo que, f é descontínua em 0. Como $f(0) = 1$, f é contínua à direita em 0.

29. f é contínua em $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \infty)$. Agora $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x} = -1$ e $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1$, logo $\lim_{x \to -1} f(x) = -1 = f(-1)$ e f é contínua em -1. Do mesmo modo, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$ e f é contínua em 1. Assim f não possui descontinuidades.

30. f é contínua em $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. Uma vez que f não está definida em $x = 0$, f não é contínua nem à direita nem à esquerda em 0. Além disso, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1$, logo $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$ e f é contínua em 1.

31. $f(x) = [\![2x]\!]$ é contínua exceto quando $2x = n \Leftrightarrow x = n/2$, n um inteiro. Na verdade, $\lim_{x \to n/2^-} [\![2x]\!] = n - 1$ e $\lim_{x \to n/2^+} [\![2x]\!] = n = f(n)$, de modo que, f é contínua somente à direita em $n/2$.

32. A função do salário tem descontinuidades em $t = 6$, 12, 18 e 24, mas é contínua à direita em 6, 12 e 18.

33. As funções $2x$, $cx^2 + d$ e $4x$ são contínuas em seus próprios domínios, logo os únicos problemas possíveis ocorrem em $x = 1$ e $x = 2$. Os limites esquerdos e direitos nesses pontos devem ser os mesmos para $\lim_{x \to 1} h(x)$ e $\lim_{x \to 2} h(x)$ existirem. Logo, temos que ter $2 \cdot 1 = c(1)^2 + d$ e $c(2)^2 + d = 4 \cdot 2$. A partir da primeira dessas equações, obtemos $d = 2 - c$. Substituindo isso na segunda, obtemos $4c + (2 - c) = 8 \Leftrightarrow c = 2$. Substituindo de volta na primeira para obter d, descobrimos que $d = 0$.

34. $g(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$ é contínua em $[-2, -1]$ e $g(-2) = -10$, $g(-1) = 4$. Uma vez que $-10 < -1 < 4$, há um número c em $(-2, -1)$ tal que $g(c) = -1$, pelo Teorema do Valor Intermediário.

35. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é contínua em $[0, 1]$ e $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Uma vez que $-1 < 0 < 1$, há um número c em $(0, 1)$ tal que $f(c) = 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário. Assim há uma raiz da equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ no intervalo $(0, 1)$.

36. $f(x) = x^5 - 2x^4 - x - 3$ é contínua em $[2, 3]$ e $f(2) = -5$, $f(3) = 75$. Uma vez que $-5 < 0 < 75$, há um número c em $(2, 3)$ tal que $f(c) = 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário. Assim há uma raiz da equação $x^5 - 2x^4 - x - 3 = 0$ no intervalo $(2, 3)$.

37. $f(x) = x^3 + 2x - (x^2 + 1) = x^3 + 2x - x^2 - 1$ é contínua em $[0, 1]$ e $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Uma vez que $-1 < 0 < 1$, há um número c em $(0, 1)$ tal que $f(c) = 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário. Assim, há uma raiz da equação $x^3 + 2x - x^2 - 1 = 0$, ou de maneira equivalente, $x^3 + 2x = x^2 + 1$, no intervalo $(0, 1)$.

38. $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) = 1 - \sqrt{2}$, $f(2) = 4 - \sqrt{3}$. Uma vez que $1 - \sqrt{2} < 0 < 4 - \sqrt{3}$, há um número c em $(1, 2)$ tal que $f(c) = 0$ pelo Teorema do Valor Intermediário. Assim, há uma raiz da equação $x^2 - \sqrt{x+1} = 0$, ou $x^2 = \sqrt{x+1}$, no intervalo $(1, 2)$.

2.6 LIMITES NO INFINITO; ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

1-8 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedades dos limites que forem usadas.

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

2. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5+2x}{3-x}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x^2-2x+5}$

4. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{7t^3+4t}{2t^3-t^2+3}$

5. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$

6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x+8x^2}}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{3+\sqrt{x}}$

8. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

9-26 Calcule os limites.

9. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r}$

10. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{6t^2+5t}{(1-t)(2t-3)}$

11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

12. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

14. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$

15. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

16. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$

17. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x}\right)$

18. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

19. $\lim_{x\to\infty} \left(x+\sqrt{x}\right)$

20. $\lim_{x\to-\infty} \left(x^3-5x^2\right)$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^7-1}{x^6+1}$

22. $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}$

23. $\lim_{x\to\infty} (x^2-x^4)$

24. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{x^4+1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+3}{x+3}$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

27. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\frac{5}{x^2}$$

ao avaliar $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(5/x^2)$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, confirme seu palpite ao calcular exatamente esse limite.

2.6 RESPOSTAS

1. 0
2. -2
3. 0
4. $\frac{7}{2}$
5. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 0
8. 0
9. 0
10. -3
11. 2
12. $-\frac{1}{4}$
13. -1
14. $\frac{3}{2}$
15. 0
16. 0
17. 0
18. $-\frac{1}{2}$
19. ∞
20. $-\infty$
21. ∞
22. 0
23. $-\infty$
24. 0
25. 0
26. ∞
27. 5

2.6 SOLUÇÕES

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{2/3}} = 0$ pelo Teorema 5.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5+2x}{3-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{5}{x}+2}{\frac{3}{x}-1} \overset{(5)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5}{x}+2\right]}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3}{x}-1\right]}$

$\overset{(1,\,2,\,3)}{=} \dfrac{5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} 2}{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} 1} = \dfrac{5(0)+2}{3(0)-1}$

$= -2$ por (9) e pelo Teorema 5.

3.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x^2-2x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$

$\overset{(5)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}$

$\overset{(1,\,2,\,3)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - 2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{0+4(0)}{1-2(0)+5(0)} = 0$ por (9) e pelo Teorema 5.

4.

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{7t^3+4t}{2t^3-t^2+3} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{7+\frac{4}{t^2}}{2-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^3}}$

$\overset{(5,1,2,3)}{=} \dfrac{\lim\limits_{t\to\infty} 7 + 4\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}}{\lim\limits_{t\to\infty} 2 - \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t} + 3\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}}$

$= \dfrac{7+4(0)}{2-0+3(0)} = \dfrac{7}{2}$ por (9) e pelo Teorema 5.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left[\frac{1}{x}-1\right]\left[\frac{2}{x}+1\right]}{\left[\frac{1}{x}+2\right]\left[\frac{2}{x}-3\right]}$

$= \dfrac{\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-1\right]\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+1\right]}{\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+2\right]\left[\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}-3\right]}$

$\overset{(5,4,1,2,7)}{=} \dfrac{(0-1)(0+1)}{(0+2)(0-3)} = \dfrac{1}{6}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2-1}{x+8x^2}\right]^{1/2} \overset{(11)}{=} \left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+8}\right]^{1/2}$

$\overset{(5,1,2)}{=} \left[\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} 8}\right]^{1/2} = \left(\dfrac{2-0}{0+8}\right)^{1/2}$

$= \dfrac{1}{2}$ por (9) e pelo Teorema 5.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/\sqrt{x}}{\left(3/\sqrt{x}\right)+1}$

$\overset{(5,1,3)}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1/\sqrt{x}\right)}{3\lim\limits_{x\to\infty}\left(1/\sqrt{x}\right) + \lim\limits_{x\to\infty} 1} = \dfrac{0}{3(0)+1}$

$= 0$ pelo Teorema 5 com $r = \frac{1}{2}$.

Ou: Observe que $0 < \dfrac{1}{3+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e use o Teorema do Confronto.

8. Uma vez que $0 \le \operatorname{sen}^2 x \le 1$, temos $0 \le \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ para todo $x \ne 0$. Por (9) e pelo Teorema 5, temos $\lim\limits_{t\to\infty} 0 = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$. Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 0$.

9. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^5}}{1+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r} - \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^3} + \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^5}}{\lim\limits_{r\to\infty} 1 + \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^2} - \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^4}}$

$= \dfrac{0-0+0}{1+0-0} = 0$

10. $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{6t^2+5t}{(1-t)(2t-3)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{6t^2+5t}{-2t^2+5t-3}$

$= \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{6+5/t}{-2+5/t-3/t^2}$

$= \dfrac{\lim\limits_{t\to-\infty} 6 + 5\lim\limits_{t\to-\infty}(1/t)}{\lim\limits_{t\to-\infty}(-2) + 5\lim\limits_{t\to-\infty}(1/t) - 3\lim\limits_{t\to-\infty}(1/t^2)}$

$= \dfrac{6+5(0)}{-2+5(0)-3(0)} = -3$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{(1/x^2)+4}}{(4/x)+1} = \dfrac{\sqrt{0+4}}{0+1} = 2$

12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+4/x}}{4+1/x}=\frac{-\sqrt{1+0}}{4+0}=-\frac{1}{4}$

Observação: Ao dividir o numerador e o denominador por x, utilizamos o fato de que, para $x<0$, $x=-\sqrt{x^2}$.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1/\sqrt{x}\right)-1}{\left(1/\sqrt{x}\right)+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+3x+1}+x}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+1/x}{\sqrt{1+(3/x)+(1/x^2)}+1}$$
$$=\frac{3+0}{\sqrt{1+3\cdot 0+0}+1}=\frac{3}{2}$$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{\sqrt{1+(1/x^2)}+\sqrt{1-(1/x^2)}}$$
$$=\frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0$$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/\sqrt{x}}{\sqrt{(1/x)+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=0$$

17. Utilizando $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ com $a=\sqrt[3]{1+x}$ e $b=\sqrt[3]{x}$, temos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)-x}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}}=0$$

18. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+(1/x)}{-\sqrt{1+(1/x)+(1/x^2)}-1}$$
$$=\frac{1+0}{-\sqrt{1+0+0}-1}=-\frac{1}{2}$$

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{x})=\infty$, uma vez que $x\to\infty$ e $\sqrt{x}\to\infty$.

20. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2-5x^2)=-\infty$, uma vez que $x^3\to-\infty$ e $-5x^2\to-\infty$ quando $x\to-\infty$.

Ou: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-5x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2(x-5)=-\infty$, uma vez que $x^2\to\infty$ e $x-5\to-\infty$.

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^7-1}{x^6+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^7}{(1/x)+(1/x^7)}=\infty$, uma vez que $1-\dfrac{1}{x^7}\to 1$ enquanto $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}\to 0^+$ quando $x\to\infty$.

Ou: Divida o numerador e o denominador por x^6 em vez de x^7.

22. Quando $x\to\infty$, $x^2\to\infty$ e $-x^2\to-\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=\lim_{t\to-\infty}e^t=0.$$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-x^4)=\lim_{x\to\infty}x^2(1-x^2)=-\infty$, uma vez que $x^2\to\infty$ e $1-x^2\to-\infty$.

24. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^4+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1/x)-(1/x^4)}{1+(1/x^4)}=\frac{0-0}{1+0}=0$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1/\sqrt{x}\right)+\left(3/x\right)}{1+3/x}=\frac{0+0}{1+0}=0$

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x/\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1/\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-1/x}}=\infty,$$

uma vez que $\sqrt{x}\to\infty$ e $\sqrt{1-1/x}\to 1$.

Ou: Divida o numerador e o denominador por x em vez de $\sqrt{x}$.

27. Se $f(x)=x^2$ sen $(5/x^2)$, uma calculadora dá os seguintes valores aproximados: $f(1)=-0{,}95892$, $f(2)=3{,}79594$, $f(3)=4{,}74674$, $f(4)=4{,}91902$, $f(5)=4{,}96673$, $f(6)=4{,}.98394$, $f(7)=4{,}99133$, $f(8)=4{,}99492$, $f(9)=4{,}99683$, $f(10)=4{,}99792$, $f(20)=4{,}99987$, $f(50)=4{,}999997$, $f(100)=4{,}9999998$. Parece que

$$\lim_{x\to\infty}x^2\ \mathrm{sen}\left(5/x^2\right)=5.$$

Demonstração: Seja $t=\dfrac{1}{x^2}$. Então, quando $x\to\infty$, $t\to 0$ e

$$\lim_{x\to\infty}x^2\ \mathrm{sen}\frac{5}{x^2}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\ \mathrm{sen}\ 5t\right)=5\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}\ 5t}{5t}=5.$$

2.7 DERIVADAS E TAXAS DE VARIAÇÃO

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador.

1-4 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

1. $y = 1 - 2x - 3x^2, \quad (-2, -7)$

2. $y = 1/\sqrt{x}, \quad (1, 1)$

3. $y = 1/x^2, \quad (-2, \frac{1}{4})$

4. $y = x/(1 - x), \quad (0, 0)$

---

5. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(2, 1)$ e $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$.

(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

6-12 Encontre $f'(a)$.

6. $f(x) = 1 + x - 2x^2$

7. $f(x) = x^3 + 3x$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

10. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3 - x}}$

11. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

12. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

13-18 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem é f em cada caso.

13. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

14. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

15. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^9 - 1}{x - 1}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to 3\pi} \frac{\cos x + 1}{x - 3\pi}$

17. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t}$

18. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$

---

19. Uma função f é dada pelos dados na tabela. Encontre os valores aproximados para $f'(x)$ quando $x = 0{,}1$, $0{,}2$, $0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}5$, $0{,}6$ e $0{,}7$.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$	5,0	4,1	4,0	4,6	5,5	6,2	6,5	6,1	4,7

20. Seja $C(t)$ a quantidade de dólares americanos *per capita* em circulação no momento t. A tabela, fornecida pelo Departamento do Tesouro, dá os valores de $C(t)$ na data de 30 de junho do ano especificado. Interprete e estime o valor de $C'(1980)$.

t	1960	1970	1980	1990
$C(t)$	$ 177	$ 265	$ 571	$ 1 063

2.7 RESPOSTAS

1. $y = 10x + 13$

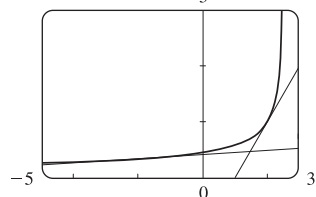
2. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

3. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

4. $y = x$

5. (a) $(5 - 2a)^{-3/2}$

(b) $y = x - 1$, $y = \frac{1}{27}x + \frac{11}{27}$

(c)

6. $1 - 4a$

7. $3a^2 + 3$

8. $\dfrac{-1}{(2a-1)^2}$

9. $-\dfrac{a^2+1}{(a^2-1)^2}$

10. $\dfrac{1}{(3-a)^{3/2}}$

11. $\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}$

12. $\dfrac{3}{2\sqrt{3a+1}}$

13. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$

14. $f(x) = x^3$, $a = 2$

15. $f(x) = x^9$, $a = 1$

16. $f(x) = \cos x$, $a = 3\pi$

17. $f(x) = \text{sen}\, x$, $a = \pi/2$

18. $f(x) = 3^x$, $a = 0$

19. –5, 4, 8, 9, 5, –0,5, –8

20. A taxa em que o dinheiro *per capita* em circulação está variando em dólares por ano; $ 39,90/ano

2.7 SOLUÇÕES

1. Utilizando (1),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to -2}\frac{\left(1-2x-3x^2\right)-(-7)}{x-(-2)} \\ &= \lim_{x\to -2}\frac{-3x^2-2x+8}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(-3x+4)(x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2}(-3x+4) = 10. \end{aligned}$$

Assim, uma equação da tangente é $y+7=10\,(x+2)$ ou $y=10x+\ 13$.

Solução Alternativa: Utilizando (2),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[1-2(-2+h)-3(-2+h)^2\right]-(-7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(-3h^2+10h-7)+7}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(-3h+10)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-3h+10) = 10. \end{aligned}$$

2. Utilizando (1),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 1}\frac{1/\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, uma equação da reta tangente é $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ ou $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

3. Utilizando (1),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to -2}\frac{1/x^2-\frac{1}{4}}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{4x^2(x+2)} \\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(2-x)(2+x)}{4x^2(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{2-x}{4x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim, uma equação da reta tangente é $y-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,(x+2)$

$\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

4. Utilizando (1),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 0}\frac{x/(1-x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1-x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} = 1. \end{aligned}$$

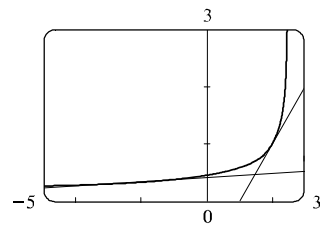
Assim, uma equação da reta tangente é $y-0=1\,(x-0)\Rightarrow$ $y=x$.

5. (a) Utilizando (1),

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{5-2a}}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{5-2a}-\sqrt{5-2x}}{(x-a)\sqrt{5-2x}\sqrt{5-2a}} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{(x-a)\sqrt{(5-2x)(5-2a)}\left(\sqrt{5-2a}+\sqrt{5-2x}\right)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{2}{\sqrt{(5-2x)(5-2a)}\left(\sqrt{5-2a}+\sqrt{5-2x}\right)} \\ &= \frac{2}{2(5-2a)^{3/2}} = (5-2a)^{-3/2}. \end{aligned}$$

(b) Em $(2, 1)$: $m=[5-2(2)]^{-3/2}=1 \Leftrightarrow$
$y-1=1\,(x-2)\Leftrightarrow y=x-1$.
Em $\left(-2,\frac{1}{3}\right)$: $m=[5-2(-2)]^{-3/2}=\frac{1}{27}\Leftrightarrow$
$y-\frac{1}{3}=\frac{1}{27}[x-(-2)]\Leftrightarrow y=\frac{1}{27}x+\frac{11}{27}$.

(c)

6.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1+(a+h)-2(a+h)^2-(1+a-2a^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h-4ah-2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(1-4a-2h) \\ &= 1-4a \end{aligned}$$

7.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3+3(a+h)-(a^3+3a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3+3h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3a^2+3ah+h^2+3\right) = 3a^2+3$$

8. $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{a+h}{2(a+h)-1}-\dfrac{a}{2a-1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)(2a-1)-a(2a+2h-1)}{h(2a+2h-1)(2a-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(2a+2h-1)(2a-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(2a+2h-1)(2a-1)} = -\frac{1}{(2a-1)^2}$$

9. $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{a+h}{(a+h)^2-1}-\dfrac{a}{a^2-1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)(a^2-1)-a(a^2+2ah+h^2-1)}{h(a^2-1)(a^2+2ah+h^2-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-a^2-1-ah)}{h(a^2-1)(a^2+2ah+h^2-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-a^2-1-ah}{(a^2-1)(a^2+2ah+h^2-1)} = \frac{-a^2-1}{(a^2-1)(a^2-1)} = -\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}$$

10. $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{3-(a+h)}}-\dfrac{2}{\sqrt{3-a}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3-a}-\sqrt{3-a-h}\right)}{h\sqrt{3-a-h}\sqrt{3-a}} = \lim_{h\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3-a}-\sqrt{3-a-h}\right)}{h\sqrt{3-a-h}\sqrt{3-a}}\cdot\frac{\sqrt{3-a}+\sqrt{3-a-h}}{\sqrt{3-a}+\sqrt{3-a-h}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2[3-a-(3-a-h)]}{h\sqrt{3-a-h}\sqrt{3-a}\left(\sqrt{3-a}+\sqrt{3-a-h}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{3-a-h}\sqrt{3-a}\left(\sqrt{3-a}+\sqrt{3-a-h}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3-a}\sqrt{3-a}\left(2\sqrt{3-a}\right)} = \frac{1}{(3-a)^{3/2}}$$

11. $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\frac{\sqrt{a+h-1}-\sqrt{a-1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h-1}-\sqrt{a-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h-a}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+h-a}+\sqrt{a-1}} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h-1)-(a-1)}{h\left(\sqrt{a+h-1}+\sqrt{a-1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h-1}+\sqrt{a-1}} = \frac{1}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a-1}} = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$$

12.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}\right)\left(\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3a+1}\right)}{h\left(\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3a+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{(3a+3h+1)-(3a+1)}{h\left(\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3a+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}}$$

13. Pela Equação 1, $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = f'(1)$, onde $f(x)=\sqrt{x}$.

Ou: $f'(0)$, onde $f(x)=\sqrt{1+x}$.

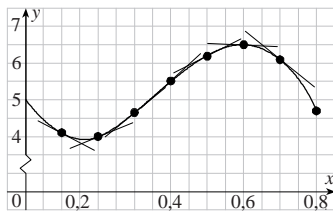
14. Pela Equação 1, $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h} = f'(2)$, onde $f(x)=x^3$.

15. Pela Equação 3, $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x - 1} = f'(1)$, onde $f(x) = x^9$.

16. Pela Equação 3, $\lim_{x\to 3\pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - 3\pi} = f'(3\pi)$, onde $f(x) = \cos x$.

17. Pela Equação 1, $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, onde $f(x) =$ sen x.

Pela Equação 3, $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{x} = f'(0)$, onde $f(x) = 3^x$.

19. Plotamos os pontos dados na tabela, então esboçamos o formato bruto da curva. Para estimar a derivada $f'(x)$, desenhamos a reta tangente para a curva em x. Parece que $f'(0{,}1) \approx -5$, $f'(0{,}2) \approx 4$, $f'(0{,}3) \approx 8$, $f'(0{,}4) \approx 9$, $f'(0{,}5) \approx 5$, $f'(0{,}6) \approx -0{,}5$ e $f'(0{,}7) \approx -8$.

20. $C'(1980)$ é a taxa de variação de dólares americanos *per capita* em circulação com relação ao tempo. Para estimar o valor de $C'(1980)$, fazemos a média dos quocientes de diferenças obtidos utilizando os anos de 1970 e 1990.

Seja $A = \dfrac{C(1970) - C(1980)}{1970 - 1980} = \dfrac{265 - 571}{-10} = 30{,}6$ e

$B = \dfrac{C(1990) - C(1980)}{1990 - 1980} = \dfrac{1063 - 571}{10} = 49{,}2$. Então

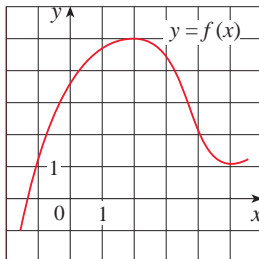
$$C'(1980) = \lim_{t\to 1980} \frac{C(t) - C(1980)}{t - 1980}$$

$$\approx \frac{A + B}{2} = 39{,}9 \text{ dólares por ano.}$$

2.8 A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

Revisão técnica: Eduardo Garibaldi – IMECC – Unicamp

1. Use o gráfico dado para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

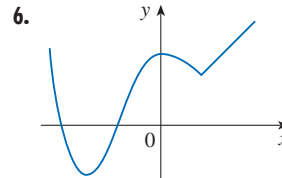
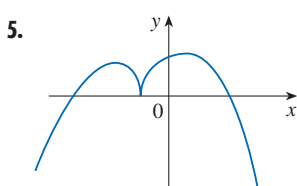
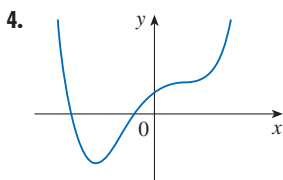
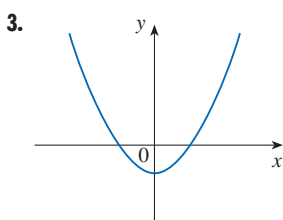
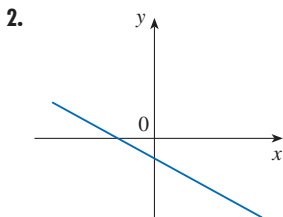
(a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

2-6 Trace ou copie o gráfico da função dada *f*. (Assuma que os eixos possuem escalas iguais.) Use, então, o método do Exemplo 1 para abaixo esboçar o gráfico de f'.

2.

3.

4.

5.

6.

7-11 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

7. $f(x) = 5x + 3$

8. $f(x) = 5 - 4x + 3x^2$

9. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

11. $G(x) = \dfrac{4-3x}{2+x}$

12. Uma função g é dada pelos dados na tabela. Encontre os valores aproximados para $g'(x)$ quando $x = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ e 14. Em seguida, esboce o gráfico de g'.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$g(x)$	1,8	4,7	6,3	6,8	3,9	2,5	2,0	1,8	1,7

13. Seja $S(t)$ a taxa de tabagismo entre os veteranos do ensino médio no ano t. A tabela (do Institute of Social Research, Universidade de Michigan) dá a porcentagem dos veteranos que relataram ter fumado um ou mais cigarros por dia durante os últimos 30 dias.

t	$S(t)$	t	$S(t)$
1978	27,5	1988	18,1
1980	21,4	1990	19,1
1982	21,0	1992	17,2
1984	18,7	1994	19,4
1986	18,7	1996	22,2

(a) Qual é o significado de $S'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa a tabela de valores para $S'(t)$.
(c) Faça os gráficos de S e S'.
(d) Como seria possível obter valores mais precisos para $S'(t)$?

2.8 RESPOSTAS

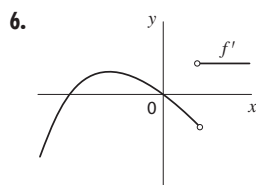
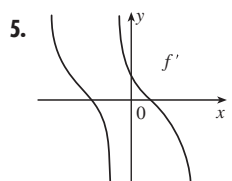
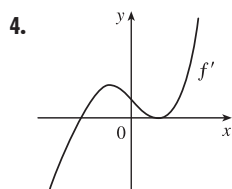
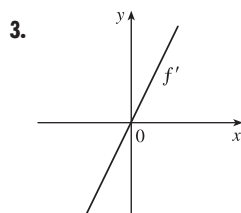
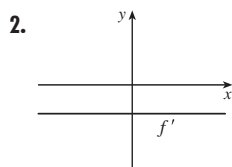
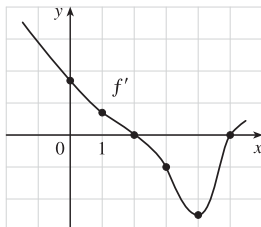
1. (a) 1,8 (b) 0,8 (c) 0 (d) –1 (e) –2,5 (f) 0

2.

3.

4.

5.

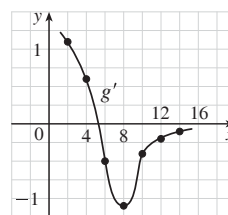
6.

7. $f'(x) = 5$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

8. $f'(x) = 6x - 4$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

9. $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

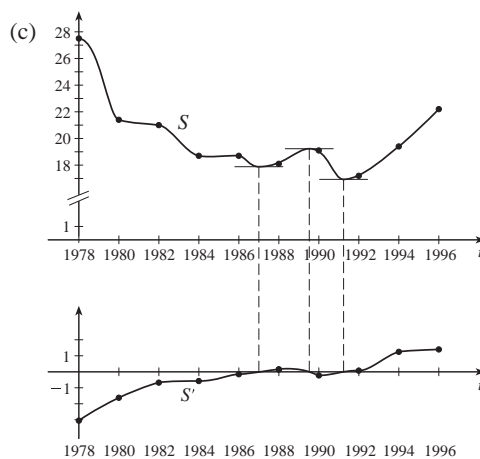
10. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $\{x \mid x \neq 1\}$, $\{x \mid x \neq 1\}$

11. $G'(x) = -10/(2+x)^2$, $\{x \mid x \neq -2\}$, $\{x \mid x \neq -2\}$

12. 1,1, 0,6, –0,5, –1,1, –0,4, –0,2, –0,1

13. (a) A taxa em que a taxa de tabagismo está variando com relação ao tempo; % por ano

(b)

t	$S(t)$	t	$S(t)$
1978	–3,05	1988	0,10
1980	–1,625	1990	–0,225
1982	–0,675	1992	0,075
1984	–0,575	1994	1,25
1986	–0,15	1996	1,40

(c)

(d) Obtendo os dados para os anos ímpares

2.8 SOLUÇÕES

1. Do gráfico de f, parece que

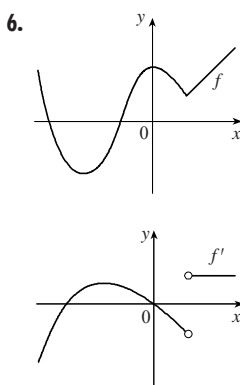
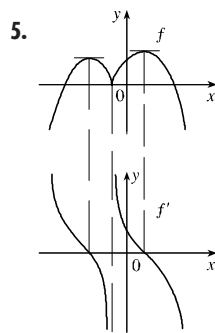
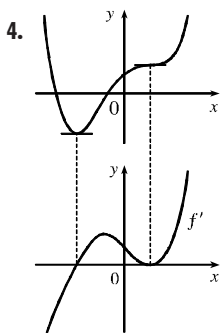
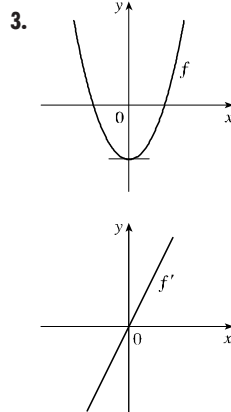
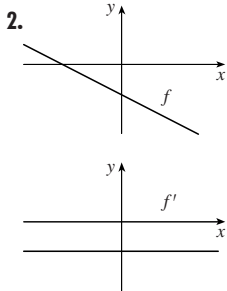
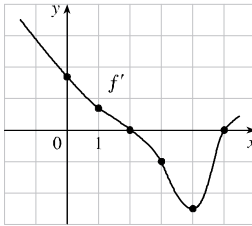
(a) $f'(0) \approx 1{,}8$
(b) $f'(1) \approx 0{,}8$
(c) $f'(2) \approx 0$
(d) $f'(3) \approx -1$
(e) $f'(4) \approx -2{,}5$
(f) $f'(5) \approx 0$

2.

3.

4.

5.

6.

7.
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x+h)+3] - (5x+3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

Domínio de f = domínio de $f' = \mathbb{R}$.

8.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[5 - 4(x+h) + 3(x+h)^2] - [5 - 4x + 3x^2]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[5 - 4x - 4h + 3x^2 + 6xh + 3h^2] - [5 - 4x + 3x^2]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h + 6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-4 + 6x + 3h) = -4 + 6x \end{aligned}$$

Domínio de f = domínio de $f' = \mathbb{R}$.

9.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)^2 + 2(x+h)] - (x^3 - x^2 + 2x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h + 2) \\ &= 3x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Domínio de f = domínio de $f' = \mathbb{R}$.

10.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h+1}{x+h-1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Domínio de f = domínio de $f' = \{x \mid x \neq 1\}$.

11. $G'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h}$

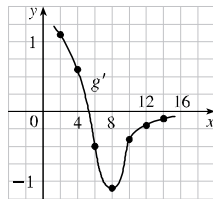
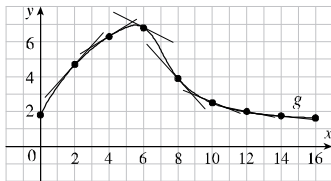
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4-3(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{4-3x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4-3x-3h)(2+x)-(4-3x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-10h}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-10}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{10}{(2+x)^2}$$

Domínio de G = domínio de $G' = \{x \mid x \neq -2\}$.

12. Plotamos os pontos dados na tabela, então esboçamos o formato bruto da curva. Para estimar a derivada $f'(x)$, desenhamos a reta tangente para a curva em x. Parece que $g'(2) \approx 1{,}1$, $g'(4) \approx 0{,}6$, $g'(6) \approx -0{,}5$, $g'(8) \approx -1{,}1$, $g'(10) \approx -0{,}4$, $g'(12) \approx -0{,}2$ e $g'(14) \approx -0{,}1$.

13. (a) $S'(t)$ é a taxa em que a taxa de tabagismo está variando com relação ao tempo. Suas unidades são em percentual por ano.

(b) Para encontrar $S'(t)$, usamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \approx \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$

para valores pequenos de h.

Para 1978:

$$S'(1978) \approx \frac{S(1980) - S(1978)}{1980 - 1978} = \frac{21{,}4 - 27{,}5}{2} = -3{,}05.$$

Para 1980: Estimamos $S'(1980)$ utilizando tanto $h = -2$ como $h = 2$ e, em seguida, fazemos a média dos dois resultados para obter uma estimativa final.

$h = -2 \Rightarrow$

$$S'(1980) \approx \frac{S(1978) - S(1980)}{1978 - 1980} = \frac{27{,}5 - 21{,}4}{-2} = -3{,}05.$$

$h = 2 \Rightarrow$

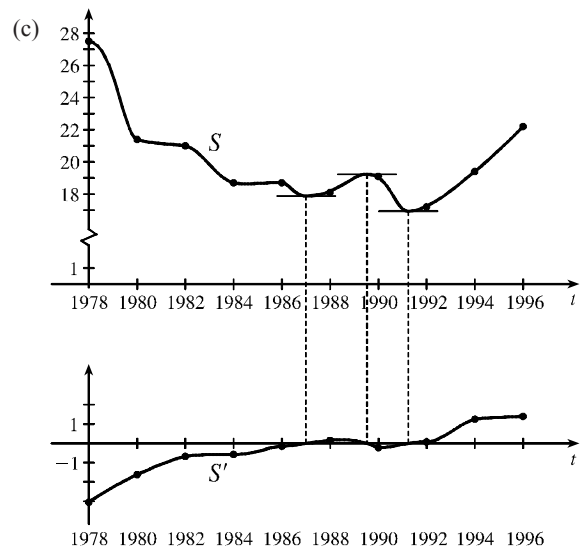
$$S'(1980) \approx \frac{S(1982) - S(1980)}{1982 - 1980} = \frac{21{,}0 - 21{,}4}{2} = -0{,}20.$$

Logo, estimamos que

$S'(1980) \approx \frac{1}{2}(-3{,}05 - 0{,}20) = -1{,}625.$

t	1978	1980	1982	1984	1986
$S'(t)$	–3,05	–1,625	–0,675	–0,575	–0,15

t	1988	1990	1992	1994	1996
$S'(t)$	0,10	–0,225	0,075	1,25	1,40

(c)

(d) Poderíamos obter valores mais precisos para $S'(t)$ ao obter dados para os anos ímpares.